LAKATOS COMO FILÓSOFO DA MATEMÁTICA [1]

Jorge Alberto Molina [2]

RESUMO

O objetivo do presente artigo é discutir algumas das características da Filosofia da Matemática de Lakatos. Na primeira parte do artigo, o pensamento de Lakatos sobre a Matemática é situado dentro do quadro geral da Filosofia da Matemática do século XX. Na segunda parte, é discutida a interpretação oferecida por Lakatos do método de análise e síntese na Geometria e na Filosofia Moderna. Essa interpretação é comparada com outras interpretações desse mesmo método. Na terceira parte deste artigo, são analisados o método de provas e refutações de Lakatos e suas aplicações à reconstrução racional da história da Matemática.

Palavras-chave: Filosofia; Epistemologia; Filosofia da Matemática.

ABSTRACT

The goal of the present paper is to discuss some of the aspects of Lakato's philosophy of Mathematics. The first part of this article is devoted to describe the main caracteristics of Lakato's Epistemology of Mathematics. In the second part the lakatosian interpretation of the old method of analysis and synteses of greek Geometry is discussed .In the third part the method of proof and refutations is analysed and evaluated as a possible rational reconstruction of the History of Mathematics.

Key Words: Philosophy; Epistemology; Philosophy of Mathematics.

[1]Este trabalho é o produto de uma pesquisa subsidiada pelo fundo FAP da Universidade de Santa Cruz do Sul. Agradeço aos árbitros anônimos da revista *Episteme* pelas suas críticas e sugestões.

[2]Doutor em Lógica e Filosofia da Ciência pela UNICAMP. Professor do Departamento de Ciências Humanas da Universidade de Santa Cruz do Sul (UNISC). Endereço da Universidade: Avenida Independência 2293, Santa Cruz do Sul - RS. CEP: 96815-900. E-mail: molina@dhum.unisc.br Professor da Universidade de Caxias do Sul (UCS). Endereço da Universidade: Rua Francisco Getúlio Vargas 1130, Caxias do Sul-RS. CEP:95001-970. E-mail: JAMolina@ucs.tche.br

INTRODUÇÃO

Imre Lakatos é uma das figuras mais conhecidas da Filosofia da Ciência do século XX. O seu nome está associado ao termo "programa de pesquisa", expressão usada por Lakatos no intuito de explicar o desenvolvimento da ciência empírica. No entanto, no início de sua carreira, os interesses de Lakatos estiveram voltados para a Filosofia da Matemática.

Como filósofo da Matemática, Lakatos apresentou um pensamento heterodoxo. Enquanto que a maioria dos filósofos da Matemática do século XX pensou que a tarefa de uma Filosofia da Matemática consistia em uma tentativa de justificar *a priori* esse conhecimento, Lakatos ancorou sua reflexão na história dessa ciência. Deste modo, Lakatos estendeu o falsificacionismo popperiano aos enunciados da Matemática.

Na primeira parte deste trabalho, nos ocupamos do lugar de Lakatos dentro do quadro geral da Filosofia da Matemática do século XX. Na segunda parte, trataremos da interpretação oferecida por Lakatos do método de análise e síntese usado na Geometria grega. Ao interpretar esse método, Lakatos apresenta suas divergências com as filosofias justificacionistas da Matemática. No método de análise e síntese, Lakatos encontra um antecedente do seu próprio método de provas e refutações, que será o objeto da terceira parte deste trabalho. O método de provas e refutações de Lakatos é um método de heurística matemática e, ao mesmo tempo, um método para entender a história dessa ciência. Discutiremos a aplicação do método de provas e refutações através de dois exemplos da história da Matemática: uma conjectura de Euler sobre as relações entre as arestas, fases e vértices dos poliedros e uma conjectura de Cauchy sobre o limite de séries convergentes de funções contínuas.

1. O LUGAR DE LAKATOS DENTRO DA FILOSOFIA DA MATEMÁTICA DO SÉCULO XX

É comum, entre muitos epistemólogos, distinguir entre ciências naturais e ciências formais. Essa separação entre Matemática e ciências naturais tem sua origem na *Investigação sobre o Entendimento Humano* de Hume (1973), que caracterizam a Matemática como a ciência que estuda relações entre conceitos. Na Filosofia dos empiristas lógicos, a distinção tomou a forma seguinte: a Matemática seria uma ciência que conteria somente enunciados analíticos enquanto que as ciências naturais conteriam enunciados sintéticos.

No entanto, o estudo da História da Ciência coloca em dúvida esta dicotomia entre Matemática e ciências naturais, ao mostrar a estreita ligação que há entre ambas. Essa ligação já se encontrava até na ciência grega. Capítulos completos da Matemática têm se desenvolvido na tentativa de resolver problemas físicos. Assim, por exemplo, muitos dos teoremas de Geometria devidos a Arquimedes têm sua origem na tentativa de resolver problemas relativos ao equilíbrio de alavancas.[3] No século XIX, a teoria das séries trigonométricas teve sua origem nas tentativas de Fourier de resolver o problema da propagação do calor. Reciprocamente, a influência da Matemática sobre a ciência empírica é amplamente conhecida. A História da Ciência mostra uma interação virtuosa entre a Física e a Matemática: problemas físicos são modelados em termos matemáticos, essa modelagem permite formular determinadas questões matemáticas e, por sua vez, essas questões dão origem a problemas matemáticos que são resolvidos por meios matemáticos.

Também dentro do âmbito da Filosofia Analítica, surgiram vozes discordantes com a caracterização da Matemática pelos empiristas lógicos como ciência que conteria somente enunciados analíticos. É sobre a distinção entre enunciados analíticos e enunciados sintéticos que os empiristas lógicos apoiavam a demarcação entre Matemática e ciência empírica. Mais tarde, Quine negou aquela distinção entre enunciados analíticos e enunciados sintéticos.[4] Por outro lado, Hintikka considerou a Matemática como sintética. Na verdade, na opinião de Hintikka, não apenas as proposições da Matemática, mas também as da Lógica com quantificadores seriam sintéticas, do mesmo modo que as proposições da ciência empírica.[5] O âmbito das verdades analíticas ficaria assim, na visão de Hintikka, restrito ao cálculo proposicional.

Mas, também o estudo da Epistemologia contemporânea mostra semelhanças entre a evolução da Filosofia da Matemática e a evolução da Filosofia das ciências naturais. Uma aproximação superficial pareceria mostrar que a Filosofia da Matemática contemporânea teria se desenvolvido independentemente do problema epistemológico da justificação das teorias empíricas. No entanto, uma análise mais aprofundada mostra que há analogias entre o desenvolvimento da Filosofia das ciências naturais e o da Filosofia da Matemática. Assim, por exemplo, o programa hilbertiano de fundamentação da Matemática encontra seu paralelo no programa de Carnap de justificação da ciência natural através da construção de uma lógica indutiva. Nos dois casos, tratava-se de justificar a linguagem objeto de estudo – a Matemática no caso de Hilbert, a Ciência

---

[3]Muitos dos resultados obtidos por Arquimedes sobre áreas de segmentos de cônicas e de esferas apóiam-se em considerações sobre o equilíbrio de alavancas (Boyer 1974). De fato, essas considerações mecânicas tinham um aspecto heurístico, pois elas permitiam saber qual era a proposição que devia ser provada. No entanto, Arquimedes não pensava que aqueles raciocínios baseados no equilíbrio de pesos constituíssem uma prova matematicamente rigorosa dos seus resultados, caso contrário ele não teria oferecido uma. Vemos, assim, já na Matemática grega sua estreita ligação com a ciência empírica.

[4]Negar a possibilidade de formular aquela distinção entre enunciados analíticos e sintéticos é o objetivo principal dos artigos de Quine *Two Dogmas of Empiricism* (1996) e *Carnap and logical truth* (1983).

[5]Ver o livro de Hintikka *Logic, Language-Games and Information*. Segundo Hintikka (1976, cap. VI), há vários sentidos de analiticidade. "Analítico", segundo Hintikka, pode ser predicado seja de enunciados ou de argumentos. De fato, o sentido primário é o segundo, já que um enunciado analítico poderia ser definido como aquele que é provado por meio de uma prova analítica. Segundo Hintikka, uma prova não analítica, isto é, sintética, é aquela na qual são introduzidos num passo da prova novos indivíduos, que não foram considerados nem nas premissas da prova nem nos passos precedentes. O exemplo típico de passo "sintético" é aquele oferecido pela regra de instanciação existencial.

Natural no caso de Carnap – por meio de uma metalinguagem absolutamente confiável. De fato, Hilbert pensava a Matemática de uma forma semelhante àquela como os filósofos do Empirismo Lógico pensavam a ciência natural. Para os empiristas lógicos e seus seguidores, devemos distinguir dois tipos de termos no vocabulário da Ciência Natural: os termos observacionais e os termos teóricos. Os termos observacionais referem-se imediatamente à experiência sensível. Os termos teóricos, pelo contrário, referem-se a entidades postuladas no intuito de explicar os fenômenos da experiência. Termos teóricos, por exemplo, são aqueles que se referem às partículas elementares da Física, como "próton" e "nêutron", mas, também, aqueles de uso comum na Mecânica, como "força", "campo gravitacional" e outros. Nós não temos uma experiência sensível direta das partículas elementares da Física, mas sim de fenômenos que supomos ter sua explicação na existência de tais partículas. Da mesma forma, para Hilbert, devíamos distinguir, na Matemática, uma parte real e uma parte ideal.[6] A parte real é aquela formada pela Aritmética e pela Geometria euclidiana. A parte ideal é aquela que contém enunciados que se referem a entidades imaginárias postuladas no intuito de provar enunciados pertencentes à parte real. Por exemplo, para provar o enunciado da parte real que afirma que não podemos em todos os casos trisectar um ângulo usando régua e compasso, precisamos da Teoria de Galois. Essa teoria algébrica se refere a entidades ideais como corpos algébricos e extensões de corpos algébricos.

Os empiristas lógicos como Carnap (1988a; 1988b) pensavam que os enunciados observacionais, que se referem diretamente à experiência sensível, não precisam de justificação. A tarefa da Epistemologia, segundo eles, seria a de justificar os enunciados que contêm termos teóricos. Na Matemática, segundo Hilbert, ocorre uma situação semelhante. O domínio confiável seria o domínio da aritmética elementar dos números naturais, ou aquele da geometria euclidiana de três dimensões. Todavia, existem e existiram suspeitas razoáveis sobre a segurança e confiabilidade da parte ideal da Matemática. Essas suspeitas surgiram quando foram descobertos os paradoxos da Teoria dos Conjuntos. A única forma de justificar as teorias da parte ideal da Matemática consistiria, segundo Hilbert, em demonstrar a consistência dessas teorias,

[6]Ver o artigo *Über das Unendliche*, de Hilbert (1983). Na verdade, a distinção entre uma parte real e uma parte ideal da Matemática é contextual. Ela depende da evolução da matemática. Se nos situarmos dentro do horizonte da geometria grega poderíamos considerar as razões incomensuráveis como "ideais". Elas foram aceitas no intuito de se fazer completa toda a geometria e, poder-se, assim, falar, por exemplo, da razão entre a circunferência e seu diâmetro. Sem a aceitação das razões incomensuráveis, Eudoxo não poderia ter formulado sua teoria das proporções. No século XVII, os infinitésimos apareceram como entidades ideais. Sem a aceitação dessas entidades evanescentes, não poderia ter sido formulado o cálculo diferencial e integral. No século XIX, foi o caso dos números complexos aparecerem como entidades ideais. Uma entidade ideal é aquela que é introduzida no intuito de completar uma teoria matemática, de fazer possível a prova de enunciados pertencentes a essa teoria. Na ciência empírica, percebemos uma dependência análoga dos termos teóricos em relação ao estágio de desenvolvimento da ciência. Termos que em uma determinada fase da evolução de uma disciplina são teóricos podem virar, em uma fase posterior, termos observacionais, devido ao aperfeiçoamento dos meios de observação e das teorias que fazem possível a construção dos aparelhos de observação.

isto é, em demonstrar que dentro dessas teorias não seria possível derivar nenhuma contradição. Mas, para ter valor explicativo e fundacional, essa prova deveria ser feita dentro de uma metalinguagem que conteria métodos de prova muito simples, na verdade, nada além dos métodos de prova da aritmética elementar. Tais métodos são chamados por Hilbert de métodos finitários.[7]

Carnap pensava a questão da justificação da ciência empírica de um modo semelhante a como Hilbert concebia a questão da justificação da Matemática: na ciência empírica, são os enunciados observacionais que desempenham o papel dos enunciados da parte real da Matemática. A parte da ciência natural que deve ser justificada é aquela que contém termos teóricos, isto é, aquela parte que se referiria a entidades não diretamente observáveis. Essa justificação deve ser feita na metalinguagem, numa linguagem sobre a linguagem da ciência natural. Essa metalinguagem é a lógica indutiva de Carnap.[8]

Assim como o empirismo lógico de Carnap encontra o seu paralelo na Filosofia da Matemática de Hilbert, o falsificacionismo de Popper corresponde, dentro da Filosofia da Matemática, à Filosofia da Matemática de Lakatos. Segundo Lakatos, não haveria diferenças entre o desenvolvimento das ciências naturais e o desenvolvimento da Matemática. Lakatos tentou aplicar à Matemática a metodologia de conjecturas e refutações proposta por Popper para a ciência natural. Dessa forma, Lakatos deu um passo adiante de Popper, que ainda considerava a Matemática como formada por um conjunto de enunciados indubitáveis, verdadeiros de uma vez para sempre, e não sujeitos à refutação.[9] Para Popper, como para os empiristas lógicos,

---

[7] *Prima facie*, os métodos finitários consistiriam nas regras usuais da lógica com quantificadores e no princípio de indução completa ou princípio de indução matemática.

[8] Temos apresentado as semelhanças entre a Epistemologia dos empiristas lógicos e o formalismo de Hilbert. No entanto, é preciso fazer a seguinte ressalva. Para os empiristas lógicos, a Lógica é absolutamente confiável. Pelo contrário, Hilbert mantém a opinião de que o raciocínio lógico, quando aplicado a quantidades infinitas, pode nos levar a engano. Na tradução inglesa de *Über das Unendliche*, lemos: "Material logic deduction is indispensable. It deceives us only when we form arbitrary abstract definitions, especially those which involve infinitely many objects. In such cases we have illegitimately used material deduction; i.e., we have not paid sufficient attention to the preconditions necessary for its valid use[...]. For logical deduction to be certain, we must be able to see every aspects of these objects, and their properties, differences, sequences, and contiguities must be given, together with the objects themselves, as something which cannot be reduced to something else and which requires no reduction " (Benacerraf e Putnam,1983, p.191-92).

[9] De fato, explicitamente, Popper não apresentou uma filosofia da Matemática. Em Popper 1982, cap. IX, e em Popper 1975, cap. IX, encontramos expressos alguns dos pontos de vista de Popper sobre a Matemática. Na obra de 1982, Popper tentou resolver o problema da aplicação dos cálculos lógicos e matemáticos à experiência, na obra de 1975, Popper se ocupou da teoria da verdade de Tarski. Implicitamente, Popper compartilha a Filosofia da Matemática do Círculo de Viena, que vê na Matemática um conjunto de verdades analíticas e, por conseqüência, definitivas. Ele faz a distinção entre Matemática pura e Matemática aplicada. Os enunciados da Matemática pura são irrefutáveis e logicamente verdadeiros, isto é, para Popper, são verdades lógicas. Os enunciados da Matemática aplicada são empíricos, isto é, refutáveis. "Se consideramos uma proposição como $2 + 2 = 4$, ela poderá ser aplicada a maças, por

os enunciados matemáticos são verdades indubitáveis que não estão sujeitos a refutações. No seu livro *Provas e refutações: A lógica da descoberta matemática*, Lakatos (1978b) apresentou uma concepção da Matemática diferente, na sua totalidade, daquela do empirismo lógico. Na visão de Lakatos, a Matemática não aparece como um reino de verdades eternas. Lakatos mostra como os próprios enunciados e provas matemáticos estão sujeitos à crítica e revisão.[10]

Lakatos estendeu o falsificacionismo popperiano à Matemática. Além da concepção falsificacionista, há uma outra tese popperiana que Lakatos aceitou. Estamos nos referindo à concepção popperiana da existência de um terceiro domínio, além do domínio da matéria e dos estados psíquicos. Popper chamou esse terceiro domínio de terceiro mundo ou de mente objetiva. Essa concepção encontra-se exposta no livro *Conhecimento Objetivo* (1975). A esse terceiro mundo pertenceriam as teorias científicas. Esse terceiro mundo teria autonomia, no sentido de que sua evolução não pode ser entendida só por apelo às condições materiais ou subjetivas que o originaram. Ele tem uma lógica interna que regula sua evolução. A História da Ciência, segundo Lakatos, descreve a evolução desse terceiro mundo. Nessa história, podemos distinguir entre uma história externa e uma história interna. A história externa estudaria as condições materiais, sociais e subjetivas que enquadram o surgimento das teorias científicas. A história interna deveria mostrar uma ligação entre as idéias presentes nas diferentes teorias científicas – mostraria como uma teoria surge a partir dos problemas colocados por outra. Essa história interna pertenceria ao terceiro reino popperiano.[11] A esse terceiro domínio, pertencem não só as teorias científicas,

exemplo, em diferentes sentidos, dos quais só dois examinaremos aqui. No primeiro desses sentidos, a proposição '*2 maçãs + 2 maçãs = 4 maçãs*' é considerada irrefutável e logicamente verdadeira, mas não descreve nenhum fato relacionado com as maçãs [...]. É apenas um truísmo lógico; [...] se baseia em certas definições dos sinais *2*, *4*, + e = [...]. Podemos dizer, neste caso, [...] que não estamos descrevendo a realidade [...]" (Popper 1982, p.237).

[10]Já na Antigüidade clássica, temos exemplos de "crítica matemática". Assim, por exemplo, Apolônio criticou as provas de Euclides referentes às cônicas no prefácio geral ao seu tratado *As cônicas*. Ele escreveu: "O terceiro livro contém muitos teoremas notáveis, úteis para a síntese de lugares sólidos e determinação de limites; a maior parte e os mais bonitos desses teoremas são novos e, quando os descobri, observei que Euclides não tinha efetuado a síntese do lugar com relação a três ou quatro retas, mas só uma parte casual dela e não bem sucedida: pois a síntese não poderia ser completada sem minhas descobertas adicionais" (Boyer 1974, p. 110). Em geral, os gregos só aceitavam aquelas provas que envolvessem construções com régua e compasso. Esta limitação dos meios de prova pode nos parecer surpreendente. No entanto, no século XX, temos que as escolas construtivistas da Matemática também limitam os nossos meios de prova. Nós aceitamos, de bom grado, a existência de uma crítica literária, mas relutamos em admitir a existência de uma "crítica matemática". No entanto, ela existe, pelo menos desde o tempo dos gregos. É claro que essa crítica não está baseada, como a crítica literária, em questões de gosto, mas sim em razões filosóficas. Os problemas de aceitar ou não aceitar provas que envolvam outros instrumentos além da régua e compasso, de aceitar ou não provas não construtivas, de considerar ou não considerar a regra de prova conhecida como indução até e_0 como uma regra finitária, não são problemas matemáticos, mas conceituais, são problemas filosóficos.

[11]A história interna conteria, segundo Lakatos, o relato da evolução dos diferentes programas de pesquisa. Para a concepção de Lakatos sobre a história da ciência, ver Lakatos 1978a, cap. 2.

mas também outros produtos culturais do ser humano como a linguagem e a arte. Esse terceiro domínio é objetivo. As entidades que o formam são objetivas, públicas. Uma teoria científica não é algo subjetivo ou privado, mas é uma entidade objetiva que pode ser apreendida por qualquer sujeito. No entanto, as entidades que formam este terceiro domínio não são pedaços de matéria, mas produtos culturais. Esta concepção de um terceiro domínio se parece muito à concepção hegeliana de um espírito objetivo (cf. Hegel, 1988).

Uma outra fonte de inspiração de Lakatos está nos trabalhos de George Pólya sobre heurística matemática. Pólya procurava determinar regras segundo as quais pudessem ser identificados os problemas matemáticos e as conjecturas (hipóteses) que tentam resolver esses problemas (Pólya, 1957; 1962). Na visão de Pólya, a Matemática não pode ser identificada com um sistema formal, em que, a partir de axiomas e regras, vamos derivando enunciados. Na verdade, a Matemática é formada por um conjunto de problemas e hipóteses e visa a resolução desses problemas.[12] Pólya foi o precursor daquilo que hoje é chamado de "teoria de problemas". A tentativa de Pólya estava muito próxima da idéia, própria de muitos filósofos da Idade Moderna, de construir uma lógica da descoberta científica, uma *ars inveniendi*, diferente da *ars demonstrandi* da Lógica de primeira ordem.

A Filosofia da Matemática de Lakatos situa-se num momento de transição na evolução dessa disciplina filosófica, em que novos problemas começam a surgir, enquanto outros deixam o primeiro plano. Pelo fato de vir a existir antes e depois de dois conjuntos de problemas bem definidos, o pensamento de Lakatos se apresenta a nós como um pensamento divergente das principais correntes e escolas da Filosofia da Matemática.

O termo lakatosiano "programas de pesquisa" fez fortuna na Epistemologia das ciências naturais e consolidou-se como um termo imprescindível dentro da Epistemologia contemporânea. No entanto, Lakatos, dentro da Filosofia da Matemática, não parece ter dado origem a uma escola significativa. Antologias contemporâneas da Filosofia da Matemática, como as de Benacerraf e Putnam (1983), e a de Hart (1996), não contêm trabalhos de Lakatos nem trabalhos que compartilhem suas concepções. Esse fato deve-se ao próprio pensamento de Lakatos. Estendendo o falsificacionismo popperiano, ele considerou a Matemática como uma ciência quase-empírica, apagando assim as fronteiras entre Matemática e Ciência Natural. No final, para Lakatos, não pode existir uma epistemologia própria da Matemática, fora da epistemologia geral das ciências empíricas.[13]

---

[12]A própria História da Matemática corrobora esta visão de Pólya. A Matemática grega tem sua origem na tentativa de resolver um conjunto de problemas, como por exemplo, cálculo de áreas e de comprimentos, construção de figuras, divisão de figuras. A apresentação da Matemática por meio de um conjunto de axiomas e postulados, como o fez Euclides, é um passo posterior (Boyer 1974, cap.7 e Eves 1997, cap.4 e cap.5).

[13]Ver o artigo *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?* (Lakatos 1980b).

No momento da publicação do ensaio principal de Lakatos sobre a Filosofia da Matemática, *Provas e refutações: a lógica da descoberta matemática* (1978b), já era evidente que nenhum dos programas de fundamentação da Matemática que surgiram no início do século XX tinha conseguido seus objetivos. A redução da Matemática à Lógica, desejada pelo logicismo, era possível, mas não nos termos de Frege (1959). Para obter esse resultado, era necessário ou fazer uso de toda a complexidade da teoria dos tipos lógicos, ou considerar a Teoria dos Conjuntos como parte da Lógica, ou aceitar lógicas de ordem superior ao primeiro. Em todos os casos, o objetivo de uma redução da Matemática a algo mais simples e evidente perdia-se. Assim, por exemplo, a Lógica dotada da teoria dos tipos resulta ser uma teoria tão ou mais complexa que as teorias matemáticas que se tentava derivar a partir dela. Por outro lado, os dois teoremas de Gödel (2000), o teorema de incompletude da aritmética formal e aquele que afirma a impossibilidade de provar a consistência da aritmética formal por métodos expressáveis dentro desse mesmo sistema formal, colocaram um limite aparentemente infranqueável às aspirações do formalismo. Gentzen (1969a, 1969b) apresentou uma demonstração da consistência da aritmética formal, mas sua prova faz uso de métodos que parecem ir além dos métodos finitários recomendados por Hilbert (1983). Por último, o intuicionismo matemático parecia conduzir a uma mutilação do conteúdo da Matemática.

Nesse contexto, não é surpreendente que os filósofos interessados na Matemática começassem a se interessar, já na década de 60, por outras questões diferentes da tarefa de justificar o conhecimento matemático.[14] Essas novas questões têm a ver com as noções de verdade matemática e de conhecimento matemático. Essas questões só puderam ser colocadas após a formulação da noção de verdade para sistemas formais, feita por Tarski (1956a, 1956b), e após o desenvolvimento da Teoria da prova, alcançado por Gentzen. O artigo *Mathematical Truth*, de Paul Benacerraf (1983), abriu um novo âmbito de problemas, ao apresentar o dilema que surge a partir dos conceitos de "verdade matemática" e de "conhecimento matemático". A caracterização tarskiana de verdade matemática em termos de referência traria, como conseqüência, a necessidade de admitir entidades abstratas como objeto da referência. Por outro lado, só conhecemos as verdades da Matemática por meio de provas. As exigências epistemológicas da Matemática nos levariam, assim, a uma espécie de verificacionismo. Como conciliar as duas exigências, aquela derivada da

[14]Benacerraf e Putnam distinguem duas atitudes filosóficas frente ao conhecimento matemático: a primeira atitude seria aquela dos chamados "epistemólogos matemáticos". Eles teriam uma atitude normativa e crítica frente ao conhecimento matemático. Segundo eles, aquelas partes do conhecimento matemático que não se sujeitam a esses cânones normativos, não deveriam ser aceitas. Os intuicionistas seriam o exemplo puro dessa atitude, que também é compartilhada em grau menor pelos logicistas e formalistas. A segunda atitude seria a daqueles que assumem o conhecimento matemático como um *factum*, tal qual ele é, e tentam fornecer uma explicação filosoficamente convincente da realidade desse conhecimento. Claramente Lakatos situa-se nesse segundo grupo. (Ver Benacerraf e Putnam 1983, Introdução).

concepção semântica da verdade e aquela derivada da epistemologia da Matemática, converteu-se em um dos principais problemas da Filosofia da Matemática de hoje. É esse dilema que Benacerraf (1983) apresenta em seu artigo *Mathematical Truth*.

Dentro do mesmo círculo de questões levantadas por Benacerraf (1983) encontra-se o artigo de Michael Dummett (1996) *The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic*. Nesse artigo, Dummett argumentou em favor de uma concepção verificacionista dos enunciados matemáticos. Segundo Dummett, o significado dos enunciados matemáticos deve ser dado em termos de condições de asseveração, e as condições de asseveração de um enunciado matemático são as provas matemáticas. O conhecimento matemático, ainda segundo Dummett, só pode ser caracterizado em termos de prova. Também o artigo de Putnam (1983) do ano 1967*, Mathematics without foundations*, contribuiu para a mudança de problemas dentro do âmbito da Filosofia da Matemática. Segundo expresso por Putnam nesse artigo, não há uma questão dos fundamentos da Matemática, porque a Matemática não precisa de uma justificação externa. Nenhuma das razões para se acreditar que há uma crise dos fundamentos da Matemática (surgimento das geometrias não-euclidianas, falta de uma prova de consistência das teorias matemáticas, falta de uma solução universalmente aceita das antinomias da teoria dos conjuntos) são concludentes.

A posição de Lakatos dentro da Filosofia da Matemática é singular. Lakatos não estava interessado em fundamentar a Matemática no sentido de dar uma justificação do conhecimento matemático. Ao estender o falsificacionismo popperiano, Lakatos afirmava que as teorias científicas não podem ser justificadas, só podem ser falsificadas. Mas, enquanto Popper considerava as refutações das teorias empíricas como definitivas, Lakatos afirmava a possibilidade de defender sempre uma teoria matemática contra uma possível refutação.[15] Lakatos também afastou-se de Popper ao considerar que as unidades da análise epistemológica não são teorias isoladas, mas conjuntos de teorias ligadas, conjuntos que posteriormente Lakatos chamou de "programas de pesquisa científica".[16] Assim, Lakatos situou-se em oposição às três escolas clássicas de fundamentação da Matemática – logicismo, formalismo e intuicionismo – as quais foram classificadas por ele sob o nome genérico de "justificacionismo". Na visão de Lakatos, o justificacionismo na Matemática caracteriza-se pela tentativa de restaurar o ideal euclidiano de teoria dedutiva. Na visão euclidiana, a Matemática consistiria dum corpo monolítico de verdades indubitáveis no qual, com base num conjunto de

[15]Esta estratégia está claramente ilustrada em *Provas e refutações* (1978b). Ao ser apresentado um poliedro que falsificaria a relação estabelecida pela conjectura de Euler, podemos afirmar que o sólido em questão não é um poliedro, ou podemos também restringir o âmbito de aplicação da conjectura originária, no caso, a poliedros convexos. Mas também podemos fazer algo mais criativo. Podemos analisar a prova oferecida para a conjectura de Euler e identificar qual é o lema que é falsificado. Sobre isto voltaremos na parte 3 de nosso artigo.

[16]*Provas e refutações* de Lakatos (1978b) contém um esboço da metodologia para a ciência empírica que mais tarde Lakatos iria desenvolver (ver Lakatos, 1978a, cap.1).

verdades evidentes (os axiomas), são deduzidas as restantes verdades. Na Filosofia da Matemática contemporânea, os representantes da tradição euclidiana são, segundo Lakatos, as escolas logicista e formalista.

Em *Provas e refutações* (1978b), Lakatos argumenta contra a opinião de que uma prova que não prova o que tem que provar carece de valor. Segundo Lakatos, essa opinião tem sua origem, por um lado, na visão euclidiana da Matemática e, por outro, na identificação das provas da Matemática usual com as derivações nos sistemas formalizados ou provas formalizadas. A concepção euclidiana da Matemática é submetida à crítica no artigo de Lakatos *Infinite regress and foundations of mathematics* (1980c). Nesse artigo, Lakatos afirma que o logicismo de Frege e Russell, o intuicionismo de Brouwer e o formalismo de Hilbert compartilham igualmente essa concepção euclidiana. Eles diferem na identificação da base evidente de onde podem ser deduzidos os demais enunciados verdadeiros da Matemática. Para os logicistas, essa base consistiria das verdades lógicas. No entanto, essa base lógica revelou-se insuficiente. Russell (1908) admitiu ao lado dos axiomas lógicos, dois axiomas não lógicos: o axioma do infinito e o axioma de redutibilidade.[17] Esses axiomas não são evidentes. No entanto, Russell acabou declarando que aceitamos os axiomas de infinitude e de redutibilidade pelo fato de que as suas conseqüências são óbvias. Para Lakatos, o fato de Russell ter admitido dois axiomas não evidentes mostraria que o programa logicista de fundamentação da Matemática ficaria aquém da realização do ideal euclidiano.[18]

Na interpretação de Lakatos, o formalismo caracterizar-se-ia por situar o plano das verdades evidentes não dentro ou detrás da Matemática, na Lógica, mas no nível da metalinguagem. De fato, no caso do formalismo, mais do que de um conjunto de verdades evidentes, poderíamos falar de um conjunto de modos de inferência evidentes (os modos finitários). Lakatos fez uma avaliação do formalismo em dois artigos, *Infinite regress and foundations of mathematics* (1980c) e *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?* (1980b). Na avaliação de Lakatos, os dois

---

[17]O mesmo Russell era ciente de que esses dois axiomas, o de infinitude e o de redutibilidade, não são lógicos. Em sua obra *Introdução à Filosofia da Matemática*, Russell (1963) afirmou que o axioma de infinitude não é um axioma que pertença à Lógica, pelo fato que, na Lógica, não podem ser feitas afirmações de existência, ao passo que, o que o axioma de infinitude faz, é asseverar a existência de um conjunto infinito. O axioma de redutibilidade é um dispositivo *ad hoc* colocado por Russell para resolver as dificuldades originadas da teoria ramificada dos tipos lógicos.

[18]No entanto, Russell era ciente de que o ideal euclidiano não podia ser realizado de uma vez para sempre. Na sua opinião, esse ideal é uma idéia regulativa no sentido kantiano, um *desideratum*, ao qual devem tender nossos esforços. Assim, ele afirma: "Since all terms that are defined are defined by means of other terms, it is clear that human knowledge must always be content to accept some terms as intelligible without definition, in order to have a starting point for its definitions. It is not clear that there must be terms which are *incapable* of definition: it is possible that, however far back we go in defining, we always *might* go further still" (Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy*, *apud*: Benacerraf, P; Putnam, H., 1983 p. 162).

teoremas de Gödel colocam uma barreira infranqueável às tentativas de atingir os objetivos do programa de Hilbert. O segundo teorema de Gödel mostraria que os métodos necessários para obter as provas de consistência das teorias matemáticas estão longe da segurança dada pela evidência. Ainda se fosse aceita, dentro dos métodos finitários, como uma extensão do ponto de vista finitista, aquela indução até e_0, usada por Gentzen na prova de consistência da aritmética elementar, ela careceria da certeza que, segundo Hilbert, devia ser atribuída aos modos finitários de raciocínio. Ou, em outras palavras, a metamatemática hilbertiana não parece ser mais evidente que aquelas teorias matemáticas cuja consistência devia ser provada por meio da metamatemática.

A caracterização do intuicionismo matemático feita nos artigos de Lakatos citados acima é um pouco confusa. No intuito de situar o intuicionismo no quadro conceitual da tradição euclidiana de redução da Matemática a um conjunto de verdades evidentes, Lakatos não percebeu que aqui, no intuicionismo, nos defrontamos com uma nova caracterização da Matemática, com uma nova elaboração do conteúdo dessa ciência, mais do que com um programa de redução ou fundamentação.[19]

Uma outra causa, apontada por Lakatos como tendo levado a uma errônea compreensão da natureza das provas matemáticas, é a da identificação das provas da matemática ordinária com as derivações dos sistemas formalizados. Em termos históricos, a aparição e uso de sistemas formais (cálculos ou formalismos) é relativamente nova. A sua origem está no programa de Hilbert de fundamentação da Matemática. Segundo Lakatos, o desenvolvimento da Matemática só pode ser entendido se distinguirmos entre a construção mental, que é propriamente a prova matemática, e a expressão lingüística da prova.[20] Eventualmente, é esta última a que pode ser considerada como fazendo parte de um sistema formalizado. Em certo sentido, Lakatos compartilha a opinião dos intuicionistas de que a imensa riqueza e variedade dos argumentos da Matemática ordinária não pode ser satisfatoriamente espelhada pelos sistemas formais. Confundir a prova com sua expressão lingüística pode nos levar, parece dizer Lakatos, a superestimar o papel da Lógica dentro da Matemática. Afinal, Lógica é um assunto relacionado com a linguagem. No entanto, a análise da expressão lingüística das provas matemáticas é um momento muito importante no desenvolvimento da Matemática. A análise da prova faz possível a crítica da prova e o melhoramento das conjecturas ingênuas.

A Epistemologia da Matemática apresentada em *Provas e refutações* (1978b) não pode ser concebida à parte da História da Matemática. Lakatos apresenta suas concepções epistemológicas como sendo uma reconstrução racional da História da Matemática. O cerne dessa Epistemologia está no método de provas e refutações, um

[19]Em *Infinite regress and foundations of mathematics*, Lakatos caracteriza o intuicionismo como uma forma de ceticismo (1980c, p.19); em *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?*, ele afirma que " it (intuitionism) never aimed at a reorganization but at a truncation of classical mathematics" (Lakatos, 1980b, p.30, nota 2)

[20]Ver *Provas e refutações* (1978b), parte I, p.73-81.

método de heurística matemática. Antes de entrar no detalhe desse método, convém tecer uma série de considerações gerais sobre a Epistemologia da Matemática de Lakatos. Já vimos que, segundo Lakatos, a Matemática é uma ciência quase empírica. Para fazer jus à caracterização da Matemática como uma ciência quase empírica, é preciso identificar quais são os falseadores das teorias matemáticas. No artigo de Lakatos *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?*, além de argumentar contra a concepção euclidiana da Matemática, ele analisa a questão dos falseadores das teorias matemáticas. Na verdade, ele só apresenta alguns exemplos. O exemplo típico é aquele no qual há um sistema formal cuja interpretação padrão é falsificada por um enunciado verdadeiro pertencente a uma teoria matemática bem estabelecida. Por exemplo, consideremos como sistema formal a aritmética formalizada de Peano, acrescentada da negação da fórmula que expressa a sentença de Gödel. A sentença de Gödel seria um falseador desse novo sistema formal. Na verdade, Lakatos identifica falseadores potenciais só para sistemas formais. A idéia de Lakatos é a de que um falseador deve ser ou um enunciado da aritmética elementar ou um enunciado da teoria ingênua dos conjuntos. Além desses, existem os falseadores lógicos: enunciados do tipo $p \wedge \neg p$. Mas estamos interessados nos falseadores de teorias consistentes. Um outro exemplo, apresentado por Lakatos, é o seguinte: consideremos NF o sistema formal da teoria dos conjuntos desenvolvido por Quine. Como, em nenhum modelo de NF, nem os ordinais infinitos nem os cardinais finitos estão bem ordenados por $\leq$, podemos dizer que a teoria ingênua dos conjuntos contém falseadores de NF. Agora, o que seria um falseador para uma teoria da matemática intuitiva é uma questão que Lakatos não resolve. Lakatos, no seu artigo *A Renaissance of the Empiricism in the recent Philosophy of Mathematics?,* parece sugerir que os falseadores potenciais de teorias matemáticas não formalizadas deveriam ser encontrados na ciência empírica. O texto de Lakatos diz assim:

> What is the nature of informal theories, that is, what is the nature of the potential falsifiers of informal theories? Are we going to arrive, [...]through informal mathematical theories to empirical theories, so that mathematics will turn out in the end to be indirectly empirical, thus justifying Weyl's, von Neumann's and — in a certain sense — Mostowski's and Kalmár's positions? [21]

Lakatos promoveu uma mutação global dos programas da Epistemologia da Matemática. O reconhecimento do valor de seu trabalho nesse âmbito ainda está por vir. Para Lakatos, a Epistemologia da Matemática não pode ser considerada

[21]*Qual é a natureza das teorias informais, isto é, qual é a natureza dos falseadores potenciais das teorias informais? Deveremos chegar, [...] através das teorias matemáticas informais, até teorias empíricas, de maneira tal que, no final, resulte que a matemática é indiretamente empírica, justificando assim a posição de Weyl, Von Neumann e — em certo modo — a de Mostowski e Kalmár?* Lakatos (1980b, p.40). (Tradução do autor.)

independentemente da História da Matemática. Não há lugar, em Lakatos, para uma Epistemologia *a priori* da Matemática, para uma Epistemologia expressada em normas racionais que deveriam reger a prática dos matemáticos.

2. LAKATOS E O MÉTODO DE ANÁLISE E SÍNTESE

A interpretação de Lakatos do método de análise e síntese, usado na Geometria e na ciência moderna, elucida bem sua concepção da Matemática. Uma comparação dela com outras interpretações da natureza desse método ajuda a esclarecer o pensamento de Lakatos sobre a Matemática. Há diversas interpretações do método de análise e síntese. A descrição desse método nos tem chegado através de um texto de Pappus. O texto de Pappus diz:

> A análise, então, toma aquilo que é procurado como se fosse admitido e disso, através de sucessivas conseqüências, passa para algo que é admitido como resultado da síntese; pois, na análise, assumimos aquilo que se procura como se (já) tivesse sido feito; e investigamos de que isto resulta e, novamente, qual é a causa antecedente deste último, e assim por diante, até que, seguindo nossos passos na ordem inversa, alcancemos algo já conhecido ou pertencente à classe dos primeiros princípios; e tal método chamamos de análise, como solução de trás para diante.
>
> Mas, na síntese, revertendo o processo, tomamos como já feito o que se alcançou por último na análise, e colocando na sua ordem natural de conseqüências o que eram antecedentes e conectando-os sucessivamente uns aos outros, chegamos, finalmente, à construção do que era procurado; e a isto chamamos de síntese.
>
> A análise é de dois tipos: o primeiro, dirigido para a descoberta da verdade, é chamado teórico, o segundo, dirigido para a descoberta do que nos é dito encontrar, é chamado problemático. (1) Na análise teórica, assumimos o que se procura como se fosse existente e verdadeiro e depois, passamos através de suas sucessivas conseqüências, como se elas fossem também verdadeiras e estabelecidas em virtude de nossa hipótese, para algo admitido: (a) se o que é admitido é verdadeiro, então o que é procurado também é verdadeiro, e a demonstração corresponderá ao caminho reverso da análise; mas, (b) se o que é alcançado é algo que se admita como falso, o que se procura é igualmente falso. (2) Na análise problemática, assumimos o que é proposto como se fosse conhecido e, depois, passamos através de suas conseqüências, tomando-as como verdadeiras, até chegarmos a algo admitido: (a) se o que é admitido é possível e obtenível, isto é, se se trata do que os matemáticos chamam de dado, então, o que era originariamente proposto será também possível e a demonstração corresponderá, novamente, à ordem inversa da análise; mas (b) se chegarmos a algo que se admite como impossível, o problema será também impossível (Pappus *apud* Heath, 1956, p. 138).

Este texto tem sido interpretado de maneiras diversas. Há nele uma certa ambigüidade sobre a natureza da análise que deu origem às diversas leituras do texto. Segundo Hintikka (1983), o método de análise pode ser identificado com os métodos de dedução natural, tais como o método dos *tableaux* semânticos de Beth e o cálculo seqüencial de Gentzen. Essa opinião aparece no artigo de Hintikka e Remes (1983) *A Análise Geométrica Antiga e a Lógica Moderna.* "A tese aqui proposta é a de que o método de análise e síntese é quase um caso especial desses métodos de dedução natural", afirmam Hintikka e Remes (1983). O método de análise consistiria, segundo essa interpretação, em uma tentativa de estabelecer conexões dedutivas entre um enunciado A e um conjunto de enunciados Γ. Se conseguimos estabelecer essas conexões, afirmamos que A se deduz de Γ. Nos *tableaux* de Beth, colocamos na coluna esquerda os enunciados que pertencem a Γ e na coluna direita colocamos A. Usando as regras do cálculo de *tableaux*, obtemos fórmulas na coluna esquerda e na coluna direita. Se uma e mesma fórmula aparece na coluna esquerda e na direita, a conexão dedutiva desejada tem sido estabelecida. No seu livro *Logic, Languages Games and Information*, caps. VI, VII, VIII e IX, Hintikka (1976) nos apresenta uma visão um pouco diferente do método de análise e síntese. Hintikka chama de sintéticas aquelas inferências dedutivas nas quais, no percurso do processo inferencial, são introduzidos novos indivíduos; caso contrário, um processo dedutivo é chamado por Hintikka de analítico. Na verdade, segundo Hintikka (1976), a síntese consiste na aplicação da regra de instanciação existencial. Agora, surge a questão: porque a análise dos geômetras gregos é analítica no sentido de Hintikka? Segundo Hintikka e Remes (1983), na análise dos geômetras gregos não são introduzidos novos indivíduos; o passo das construções auxiliares, onde novas figuras são introduzidas no raciocínio, viria antes do processo analítico propriamente dito. A ambigüidade do texto de Pappus se deveria, segundo Hintikka e Remes (1983), ao fato dos geômetras gregos não conhecerem a possibilidade de permutar as diferentes aplicações das regras em um argumento lógico, tornando assim, possível que as instanciações (construções) possam ser reunidas de maneira a preceder a demonstração propriamente dita. No resumo, Hintikka e Remes (1983) interpretam o antigo método de análise e síntese dos geômetras gregos a partir da Lógica de primeira ordem.

Para Lakatos, o método de análise e síntese não é um método de justificação de proposições geométricas, mas um método para a descoberta de novas verdades. Lakatos salienta esse aspecto de procura dos possíveis antecedentes de uma conseqüência dada. Às vezes, ele parece também interpretar o método da análise e síntese a partir do falsificacionismo de Popper, não como um método de justificação de proposições geométricas, mas como um método de refutação. Se do enunciado suposto (o que se procura) se deduz uma conseqüência falsa, então o enunciado suposto é falso. Isso é claro. Mas, igualmente, o texto de Pappus afirma que, se do enunciado suposto se deduz uma conseqüência verdadeira, então o enunciado suposto será também verdadeiro. Que justifica essa afirmação, levando em conta que de premissas falsas podem ser deduzidas conclusões verdadeiras? A reposta que o texto de Pappus parece sugerir é a de que, ao chegar-se a uma conclusão verdadeira, nós podemos percorrer, por meio da síntese, o caminho dedutivo na sua ordem invertida, "colocando na sua ordem natural de conseqüências os que eram antecedentes e conectando-os sucessivamente uns aos outros" até chegar a deduzir o que na análise era suposto como verdadeiro. Essa é a explicação que Robinson (1983) oferece no seu artigo *A análise na geometria grega*. No entanto, do ponto de vista lógico, esta explicação não é satisfatória. Podemos ter uma cadeia assim: $S \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow \ldots \rightarrow C$. De nosso suposto S, deduzimos, por análise, a conseqüência verdadeira C. Num dos passos da cadeia, por exemplo, no trânsito de E a F, deduzimos F a partir de E e de alguma outra hipótese auxiliar H_1. O que nos garante que, ao fazer a síntese de F e de H_1, possamos deduzir E?

Lakatos resolve a dificuldade apresentada acima da forma seguinte: não devemos pensar o método de análise e síntese a partir da Lógica. Ele não é, em primeiro lugar, um método de dedução, mas um método de heurística matemática. O primeiro parágrafo do texto de Pappus citado acima parece apoiar a Lakatos:

> [...] pois, na análise, assumimos aquilo que se procura como se tivesse sido (já) feito, e investigamos de que é que isto resulta, e novamente qual é a causa antecedente deste último, e assim por diante até que seguindo nossos passos na ordem inversa, alcançamos algo já conhecido ou pertencente à classe dos primeiros princípios [...].

Assim, parece que o método de análise consiste num método de procura das possíveis premissas de uma conclusão. Também esta é a interpretação avançada por Cornford (1932) no seu artigo sobre matemática e dialética na República VI-VIII.

O capítulo 5 do volume 2 dos *Philosophical Papers* de Lakatos (1980a) também versa sobre o método de análise e síntese. Na primeira parte desse capítulo, Lakatos refuta a opinião de Hintikka de que o método de análise e síntese pode ser pensado a partir dos modernos métodos de dedução natural. Para fundamentar sua concepção sobre o método de análise e síntese, Lakatos se apóia no uso que os filósofos e cientistas da Idade Moderna, como Descartes (cf. 1973, p. 78) e Newton (1974), fizeram desse método. Isto é coerente com a concepção de Lakatos que rejeita a separação entre Matemática e ciências empíricas. Para Lakatos, a Matemática é como a Física teórica: uma ciência quase empírica. Não nos deveria surpreender, então, que cientistas da Natureza, como Newton, usaram o mesmo método que os geômetras gregos. Segundo Lakatos, o método de análise é um método de heurística, que serve para descoberta de novas verdades, que foi usado tanto na geometria grega como na Física da Idade Moderna. Zjelko Lopáric (1997) também coincide com Lakatos, ao considerar que na ciência cartesiana encontramos uma aplicação do método de análise e síntese. Na sua obra *Descartes heurístico*, Lopáric (1997) argumenta contra a interpretação de Gueroult (1968) da filosofia e ciência cartesiana. Na visão de Lopáric, encontramos também em Descartes uma oposição ao ideal euclidiano de reduzir a ciência a um conjunto de verdades evidentes.

Na segunda parte do capítulo 5 do volume 2 dos *Philosophical Papers* de Lakatos (1980a), são apresentadas duas aplicações do método de análise e síntese. Uma é a prova de Cauchy da conjectura de Euler sobre os poliedros, a outra é a dedução das leis de Kepler por Newton. O primeiro exemplo mostra que Lakatos considera o método de análise e síntese o antecessor imediato do seu método de provas e refutações. O segundo mostra uma aplicação desse método à ciência empírica.

Segundo Norman Gulley (1983), no artigo *A Análise Geométrica Grega*, o texto de Pappus apresenta dois métodos distintos. Um método de heurística matemática, que consiste em buscar as possíveis hipóteses de onde uma conclusão dada é deduzida, e um método de demonstração, que consistiria em buscar conexões dedutivas entre uma proposição e um conjunto de hipóteses. Se as coisas fossem assim, as duas interpretações opostas, a de Hintikka e a de Lakatos, estariam certas. O texto apresentaria dois métodos e cada um dos oponentes só teria reconhecido um deles.

3. O MÉTODO DE PROVAS E REFUTAÇÕES

No seu livro *Provas e refutações: a lógica da descoberta matemática,* Lakatos (1978b) apresentou o seu método de provas e refutações que, na sua opinião, daria a chave para a correta interpretação da história da matemática. Lakatos ilustra seu método por meio da interpretação da história da conjectura de Euler, a qual afirma que, para todo poliedro, vale a relação $V - A + F = 2$, onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro. O método de provas e refutações consta, segundo Lakatos, dos seguintes estágios:

(1) Conjectura primitiva. No caso analisado, a conjectura afirma que, para todo poliedro, vale a relação $V - A + F = 2$.

(2) Prova (um argumento mental ou argumento aproximado que decompõe uma conjectura primitiva em subconjecturas ou lemas).

(3) Surgem contra-exemplos globais, isto é, contra-exemplos à conjectura primitiva.

(4) A prova é reexaminada: é identificado um lema que é refutado pelo contra-exemplo global. Pode acontecer ou que este lema culpável tenha permanecido "oculto" anteriormente ou que ele não tenha sido corretamente identificado. Ele é explicitado e é incorporado como condição às hipóteses da conjectura primitiva. Desta forma, a conjectura primitiva é melhorada. Os conceitos que ocorrem na conjectura primitiva ficam enriquecidos.

(5) São examinadas provas de outros teoremas no intuito de determinar se o lema descoberto aparece neles ou se o conceito gerado pela prova aparece neles.

(6) São comprovadas as conseqüências da conjectura melhorada.

Assim expressas, estas regras podem parecer vazias. No entanto, ao estudar a prova de Cauchy da conjectura de Euler e as criticas a essa prova, vemos uma aplicação concreta dessas regras. A prova de Cauchy é muito simples. Trata-se de provar que, para todo poliedro, vale a relação $V - A + F = 2$. Na época de Cauchy, não existia entre os matemáticos muita clareza sobre o conceito de poliedro. Na sua maioria, os matemáticos entendiam por poliedro um sólido limitado por faces poligonais. Mas outros matemáticos do século XIX chegaram a considerar sob o conceito de poliedro qualquer superfície constituída de um sistema de polígonos.[22] Consideremos um par de cubos tal que o primeiro esteja contido dentro do segundo (Figura 1).

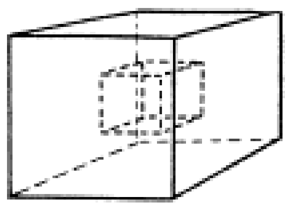

Figura 1

Podemos pensar esse par de cubos como determinando um sólido oco. Para cada um dos cubos, temos que $V – A + F = 2$ – logo, para o sólido oco, teríamos que $V – A + F = 4$. Se nós aceitamos que esse sólido oco é um poliedro, teríamos refutado a conjectura de Euler. No entanto, já no século XIX, Jonquières (1890) afirmava que esse par de cubos não determinava um poliedro. Por poliedro entendia Jonquières uma superfície. No caso da Figura 1, teríamos duas superfícies: aquela determinada pelo cubo maior e aquela determinada pelo cubo menor. Isto é, teríamos dois poliedros. Em *Provas e refutações*, Lakatos (1978b) mostra como foi mudando ao longo do século XIX o conceito de poliedro, à medida que os matemáticos submetiam a prova da conjectura de Cauchy à critica ou tentavam refutar essas críticas. O que Lakatos mostra é que os conceitos da Matemática são dinâmicos. A afirmação “para todo poliedro vale a relação $V – A + F = 2$” significava uma coisa para Cauchy e, uma outra, para Poincaré, no final do século XIX, porque entre ambos ocorreram muitas modificações do conceito de poliedro, desde conceber os poliedros como sólidos, passando pela concepção dos poliedros como superfícies, até concluir com a definição em termos da álgebra vetorial dos poliedros como politopos. Um outro exemplo de mobilidade de conceitos apresentado por Lakatos relaciona-se com a conjectura de Cauchy de que o limite de uma série convergente de funções contínuas é uma função

[22] Ver *Provas e refutações*, capítulos 1, 4 e 6 (Lakatos 1978b).

contínua (Cauchy 1821).[23] Esse exemplo é analisado por Lakatos nos Apêndices I e II de *Provas e refutações* e nos *Philosophical Papers* volume 2, capítulo 3. Na mesma época que Cauchy tinha provado sua conjectura sobre o limite das séries convergentes de funções contínuas, já era conhecida a série *cos x - 1/3 cos 3x + 1/5 cos 5x - ...*, que aparece em *La mémoire sur la propagation de la chaleur* de Fourier (Fourier 1808). Segundo a concepção atual, isto é, com os conceitos atuais de convergência e de continuidade, diferentes daqueles do século XIX, a série de Fourier apresentada acima seria um contra-exemplo à conjectura de Cauchy, dado que essa série converge a uma função descontínua. Os livros de História da Matemática que consideram que o desenvolvimento desta ciência consiste de uma acumulação de verdades, por exemplo, estamos pensando nos *Elements de Histoire des Mathématiques* de Bourbaki (1960), limitam-se a afirmar que a prova de Cauchy estava errada e que a proposição vale só no caso em que a convergência da série seja uniforme. Segundo essa visão, foi Seidel (1847) quem percebeu o erro de Cauchy e acrescentou às hipóteses da conjectura de Cauchy a condição de que a série devia convergir uniformemente. No entanto, essa interpretação não consegue explicar porque, sendo conhecida a série de Fourier pelos matemáticos contemporâneos de Cauchy, eles não a consideraram como um contra-exemplo à conjectura de Cauchy. De fato, o que aconteceu foi o seguinte: alguns matemáticos, como Fourier, consideraram que a série *cos x - 1/3 cos 3x + 1/5 cos 5x - ...* converge a uma função contínua. A função limite desta série tem um gráfico composto de linhas retas separadas, cada uma das quais é paralela ao eixo dos x, cada uma dessas linhas está separada de outra por uma distância de π /4. Como essas linhas podem ser unidas por perpendiculares, essa função limite foi considerada por Fourier como contínua, ainda que, sob os critérios atuais, ela seja descontínua. Outros matemáticos, como escreveu Abel (1881a,1881b) na sua carta à Holmboë e na sua carta à Hansteen , consideraram que, na Matemática, só deviam ser aceitas séries de potências – as séries trigonométricas, na opinião de Abel, eram anomalias. Dessa forma, vemos que conceitos como “série” e “continuidade” têm mudado de significado. Quando discutimos a prova de Cauchy da proposição “toda série convergente de funções contínuas converge a uma função contínua”, devemos levar em conta que o significado das palavras “série” e “contínua” é diferente do significado que essas palavras têm na Matemática atual. Dado o significado que para Cauchy tinham os termos “série”, “continuidade” e “convergência”, a série *cos 3x - 1/3 cos 3x + 1/5 cos 5x - ...* não constitui um contra-exemplo à conjectura de Cauchy.

[23]“Lorsque les différentes termes de la série $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, u_{n+1} \ldots$, sont des fonctions d’ une même variable *x*, continues par raport à cette variable, dans le voisinage d’une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x” (Cauchy 1821, p. 131).

Desta forma, Lakatos mostra o caráter histórico e dinâmico dos termos da Matemática. Podemos afirmar que o Cálculo no século XIX tinha outro programa de pesquisa que o Cálculo atual. De fato, na história do Cálculo, podemos distinguir quatro programas de pesquisa: o de Leibniz (1971), o geométrico de Newton (1974), o atual formulado por Weierstrass e o divergente do *Análise não standard* de Robinson (1983).

A análise das duas provas de Cauchy, da prova da conjectura de Euler, e da prova do teorema sobre séries convergentes de funções contínuas e de suas críticas ilustram as 7 máximas do método de provas e refutações. A prova da conjectura de Euler é assim: trata-se de provar que para todo poliedro se satisfaz a relação $V - A + F = 2$. Considere-se um poliedro qualquer, por exemplo, um cubo. Tiremos uma das faces do poliedro e estendamos o restante sobre um plano. Podemos supor que o poliedro é feito de borracha e que, ao suprimir uma das faces, podemos estender o restante num plano, isto é, podemos achatar o que ficou (Figura 2). Se a conjectura de Euler for verdadeira, então para o poliedro achatado deveria valer a relação $V – A + F = 1$, posto que temos suprimido uma face. Agora, triangulamos cada face dessa superfície (Figura 3). Esse processo de triangulação não altera a relação $V – A + F$, porque, ao triangular, acrescentamos uma aresta e também uma face. Retiramos, agora, os triângulos um a um. Quando retiramos os triângulos, temos duas possibilidades: ou ao retirar um triângulo suprimimos uma face e uma aresta (Figura 4) ou retiramos duas arestas, uma face e um vértice (Figura 5). Nos dois casos, a relação $V – A + F$ não se altera.

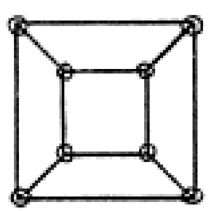

Figura 2

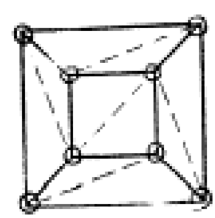

Figura 3

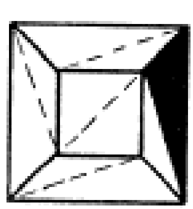

Figura 4

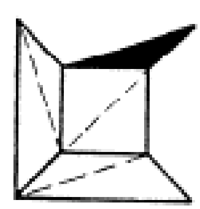

Figura 5

Suprimindo os triângulos um a um, chegamos no final do processo a ter só um triângulo. Se a conjectura de Cauchy for verdadeira, para esse triângulo deverá valer que $V – A + F = 1$, o que de fato acontece, pois todo triângulo tem três arestas e três vértices. Temos aqui, nesta prova, um típico exemplo do método analítico. O que é procurado é o enunciado G "em todo poliedro, vale a relação $V - A + F = 2$". Assumimos esse enunciado como verdadeiro, e depois passamos por meio de suas sucessivas conseqüências, como se elas fossem também verdadeiras e estabelecidas em virtude de nossa hipótese, para algo trivialmente verdadeiro, isto é, para o enunciado H, que afirma que "em todo triângulo, vale a relação $V - A + F = 1$". A passagem de "em todo poliedro, vale a relação $V - A + F = 2$" para "em todo triângulo, vale a relação $V – A + F = 1$" é possível porque usamos implicitamente três lemas: L1) podemos achatar o que fica de um poliedro ao suprimir uma de suas caras; L2) podemos triangular essa superfície plana resultante sem alterar a relação $V – A + F$; L3) podemos suprimir os triângulos resultantes do processo de triangulação um a um sem alterar a relação $V – A + F$. Agora deveríamos fazer o processo de síntese. Na síntese, revertendo o processo anterior, tomamos já feito o que se alcançou por último na análise, isto é, que "para todo triângulo, vale a relação $V – A + F = 1$", e colocando na sua ordem natural de conseqüência o que eram antecedentes, e conectando-os sucessivamente uns aos outros, chegamos finalmente ao que era procurado, isto é, a "em todo poliedro vale a relação $V – A + F = 2$". Mas, aqui, nós nos defrontamos com um problema lógico que é o que origina toda a discussão sobre a natureza do método da análise: o que nos garante que a síntese, a demonstração, corresponderá ao caminho inverso da análise? No nosso exemplo, sabemos que de G, usando L1, L2 e L3, podemos deduzir H, no entanto, disso não se segue que de H, usando L1, L2, L3, possa ser deduzida G em todos os casos.

Lakatos (1978b) distingue entre contra-exemplos globais e contra-exemplos locais. Um contra-exemplo local é um contra-exemplo a um dos lemas usados na prova da conjectura, mas não necessariamente um contra-exemplo à conjectura. Por exemplo, consideremos novamente um cubo. Um cubo satisfaz a relação $V - A + F = 2$, logo não é um contra-exemplo global. No entanto, se achatamos o cubo após retirar uma face, triangulamos a superfície achatada e retiramos os triângulos na ordem indicada na Figura 6, temos que, ao eliminar o oitavo triângulo, ficamos com dois triângulos desconexos e alteramos a relação $V – A + F$, pois eliminamos duas arestas e nenhum vértice. Assim, temos encontrado um contra-exemplo ao lema L3, o qual nos obriga a reformular esse lema. O novo lema L3* será o seguinte: há uma ordem de eliminação dos triângulos que não altera a relação $V – A + F$. Um contra-exemplo local constitui uma crítica da prova, mas não da conjectura. O contra-exemplo local acima examinado nos obriga a melhorar a prova ao corrigir um dos lemas usados.

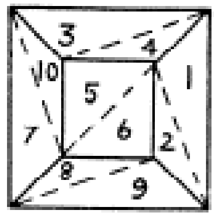

Figura 6

Um cilindro pareceria constituir um contra-exemplo global. Podemos considerar que o cilindro tem 3 faces, o rolo e as duas caras circulares, 2 arestas, os círculos e nenhum vértice. Para o cilindro, vale $V - A + F = 1$. O cilindro refuta a conjectura de Euler. Quando nos defrontamos com uma situação como essa gerada pelo cilindro, temos, segundo Lakatos, dois caminhos. Um seria fazer como fez Abel, no caso do contra-exemplo de Fourier à conjectura de Cauchy sobre o limite de séries convergentes de funções contínuas. Abel restringia a aplicação do conceito "série" ao domínio das séries de potências. Da mesma forma, nós poderíamos restringir o conceito de poliedro, de maneira que o cilindro não caia sob esse conceito. Por exemplo, poderíamos dizer que poliedro é uma superfície ou um sólido com caras poligonais, e isso exclui o cilindro. Uma outra via, é aplicar a máxima 4 do método de provas e refutações. Podemos identificar um lema até então oculto, tal que o cilindro seja um contra-exemplo local a esse lema. Por exemplo, podemos identificar esse lema oculto como aquele que afirma o seguinte: para toda face de um poliedro e para toda diagonal dessa face, a diagonal divide a face em duas partes, e existe ao menos uma diagonal nessa face. O cilindro refuta esse lema porque suas faces não têm diagonais. Agora, explicitamos esse lema e o incorporamos como condição à conjectura primitiva. Chamamos de simplesmente conexos os poliedros que satisfazem o lema oculto mencionado acima. Formamos uma nova conjectura, que contém como condição o lema oculto:

Para todo poliedro, se ele é simplesmente conexo, então vale a relação $V - A + F = 2$.

Segundo o método de provas e refutações, a aparição de contra-exemplos a uma conjectura leva a uma análise mais acurada da prova da conjectura, a fim de identificar os lemas ocultos que não são satisfeitos pelos contra-exemplos. Estes lemas são agregados como condições à conjectura primitiva, dando origem, assim, a uma conjectura melhorada. Pelo contrário, outras atitudes face à aparição dos contra-exemplos revelam-se estéreis. A rendição, isto é, face à aparição dos contra-exemplos, declarar simplesmente que a conjectura é falsa, não leva ao progresso da Matemática, fecha o caminho ao aprimoramento da conjectura. Restringir o domínio dos termos da conjectura, como fazia Abel, no caso da série de Fourier, ou, como no caso da conjectura de Euler, restringir o domínio de aplicação do conceito poliedro também não leva ao progresso do conhecimento. No entanto, a aplicação do método de provas e refutações nos coloca na seguinte situação constrangedora: a análise da prova nos leva a restringir o domínio da conjectura ingênua, ao incorporar como condições os lemas suspeitos. Já não afirmamos que a conjectura vale para poliedros quaisquer, mas afirmamos que ela é válida para poliedros convexos numa primeira tentativa e, logo, afirmamos que ela é válida para poliedros simplesmente conexos. Aos poucos, vamos colocando restrições ao domínio da conjectura primitiva. Porém, há um ganho, no sentido de que o estudo acurado das provas oferecidas nos permite abrir novos domínios para a investigação matemática. A crítica das provas faz surgir novos âmbitos para a pesquisa matemática.

O estudo do método de provas e refutações nos leva a questionar sobre a noção de prova na Matemática não formalizada. Há inúmeros estudos sobre a noção de prova nos sistemas formais, esses estudos fazem parte da disciplina conhecida como Teoria da Prova. Mas sobre a noção de prova na Matemática comum, não há muito. O mais apropriado parece ser considerar as provas matemáticas como construções mentais e distingui-las de sua expressão num sistema formal. Uma questão estreitamente ligada à noção de prova é a da evidência dos princípios da demonstração. Sobre esse assunto, Aristóteles e Russell expressam opiniões opostas. Aristóteles (1979) afirma nos *Les Seconds Analytiques*, A 2, 71^b20, que

> [...] é necessário que a ciência demonstrativa parta de princípios que são verdadeiros, primeiros, imediatos, mais conhecidos que a conclusão, anteriores a ela, e causas dela. É sob essas condições, em efeito, que os princípios daquilo que é demonstrado serão apropriados à conclusão. Um silogismo pode existir sem essas condições, mas ele não será uma demonstração, pois ele não produzirá ciência.

Pelo contrário, Russell (1956, p.325-26) afirma em *Logical Atomism* que

> When pure mathematics is organized as a deductive system — *i.e.*, as the set of all those propositions that can be deduced from an assigned set of premises — it becomes obvious that, if we are to believe in the truth of pure mathematics, it cannot be solely because we believe in the truth of the set of premisses. Some of the premisses are much less obvious than some of their consequences, and are believed chiefly because of their consequences.[24]

[24]Quando a Matemática pura é organizada como um sistema dedutivo, isto é, como o conjunto de todas aquelas proposições que podem ser deduzidas de um conjunto destacado de premissas, é óbvio que, se vamos acreditar na verdade da matemática pura, não pode ser só porque nós acreditamos na verdade do conjunto das premissas. Algumas das premissas são menos óbvias que algumas de suas conseqüências, e são consideradas verdadeiras principalmente por causa de suas conseqüências. (Tradução do autor).

Isto é, para Russell, as conseqüências são mais evidentes que os princípios, contradizendo a Aristóteles. A posição de Lakatos estaria muito próxima, nessa questão, a Russell. Aristóteles expressaria a visão euclidiana da matemática, cujos defeitos não são de ordem lógica. O defeito da visão euclidiana da Matemática é que faz impossível entender como é possível uma crítica das provas da Matemática, e *a fortiori* como é possível o progresso na Matemática. Duas outras questões que deveriam ser pesquisadas são a de se as provas da Matemática devem ser infinitas ou finitas e a de se elas devem ser efetivamente testáveis ou não. Não é fácil chegar a uma posição definitiva sobre essas questões. Nos sistemas formais, as provas (derivações) devem satisfazer uma série de exigências bastante rígidas. Por exemplo, a exigência de serem finitas e efetivas. Um inventário dessas exigências encontramos na Introdução a *Introduction to Mathematical Logic* de Church (1956). No entanto, na Matemática informal, parece razoável flexibilizar essas exigências. Uma maior liberdade nos requisitos que devem ser cumpridos pelas provas parece ser muito mais compatível com a Filosofia da Matemática de Lakatos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABEL, N. H. Letter to Holmboë. In: LIE, S & SYLOW, L. (orgs.). *Oeuvres Complètes*, V. 2. Christiana: Grondahl, 1881a. p.257-58

_____. Letter to Hansteen. In: LIE, S. & SYLOW, L. (orgs.). *Oeuvres Complètes,* V. 2. Christiana: Grondahl, 1881b.p.263-65.

ARISTOTELES. *Les Seconds Analytiques*. Paris: Vrin, 1979.

BENACERRAF, P. Mathematical Truth. In: BENACERRAF, P & PUTNAM, H (orgs.). *Philosophy of Mathematics*: *Selected Readings*. Cambridge: Cambridge University Press, 1983. pp.403-20.

BENACERRAF, P; PUTNAM, H.(orgs.). *Philosophy of Mathematics: Selected Readings.* Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

BOURBAKI, N. *Eléments d'Histoire des Mathématiques*. Paris: Hermann, 1960.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

CARNAP, R. O caráter metodológico dos conceitos teóricos. In: SCHLICK, M. & CARNAP, R. *Coletânea de textos*. São Paulo: Abril, 1988a. pp.221-252

CARNAP, R. Testabilidade e significado. In: SCHLICK, M. & CARNAP, R. *Coletânea de textos.* São Paulo: Abril,1988b. pp.171-219

CAUCHY, A. *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Politechnique*. Paris: de Bure, 1821.

CHURCH, A. *Introduction to Mathematical Logic,* V. I. Princeton: Princeton University Press, 1956.

CORNFORD, F. *Mathematics and Dialectics in the Republic VI-VIII*. Oxford, Mind. v.41, p.37-52 e 173-190, 1932.

DESCARTES, R. *Discurso do método*. São Paulo: Abril, 1973

DUMMETT, M. The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic. In: HART,W.D (org). *The Philosophy of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press,1996. pp.64-94

_____. *Elements of Intuitionism*. Oxford: Oxford University Press,1978b.

EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 1997.

FOURIER, J. Mémoire sur la propagation de la Chaleur dans les Corps solides. *Nouveau Bullettin des Sciences, par la Societé Philomathique de Paris.* Paris, v. I, pp.112-16, 1808.
FREGE, G. *The Foundations of Arithmetic*. Oxford: Blackwell, 1959.
GENTZEN,G. The Consistency of Elementary Number Theory. In: SZABÓ, M. (org.). *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. Amsterdam: North Holland, 1969a. p. 132-213.
_____. New Version of the Consistency Proof for Elementary Number Theory. In: SZABÓ, M (org.). *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. Amsterdam:North Holland, 1969b. pp.252-286.
GÖDEL, K. On formally undecidable propositions of *Principia Mathematica* and related systems. In: VAN HEIJENOORT, J. *From Frege to Gödel; a source book in Mathematical Logic, 1879-1931*. New York: Harvard University Press, 2000. pp .592-617.
GUEROULT, M. *Descartes selon l ´ordre des raisons*. Paris: Aubier,1968.
GULLEY, N. A Análise Geométrica Grega. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, Campinas, n.4, pp.16-27, 1983.
HART, W (org). *The Philosophy of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press, 1996.
HEATH, T.L. *Euclid. The Thirteen Books of the Elements*. New York: Dover, 1956
HEGEL,G.W. *Enciclopédia das ciências filosóficas em epítome*. Lisboa: Edições 70, 1988.
HILBERT, D. On Infinite. In: BENACERRAF, P & PUTNAM, H (orgs.). *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. Cambridge: Cambridge University Press,1983. pp.183-201.
HINTIKKA, J. *Lógica, Juegos de Lenguaje e Información*. Madri: Tecnos, 1976.
HINTIKKA, J; REMES, U. A análise geométrica antiga e a Lógica moderna. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, Campinas, n.4, pp.28-47, 1983.
HUME, D. *Investigação sobre o entendimento humano*. São Paulo: Abril, 1973.
JONQUIÈRES, E. Note sur le Théorème d' Euler dans la Théorie des Polyèdres. *Comptes Rendues des Séances de la Académie des Sciences*, Paris, n.110, pp.110-115, 1890.
LAKATOS, I. *The methodology of scientific research programmes - Philosophical Papers*, V. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 1978a
_____. *Provas e refutações: a lógica da descoberta matemática.* Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978b.
_____. *Mathematics, Science and Epistemology - Philosophical Papers*, V. 2. Cambridge: Cambridge University Press, 1980a.
_____. A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics? In:_____. *Mathematics, Science and Epistemology*. Cambridge: Cambridge University Press, 1980b.p.24-42.
_____. Infinite Regress and Foundations of Mathematics. In:_____. *Mathematics, Science and Epistemology*. Cambridge: Cambridge University Press, 1980c. p 3-23
_____. *Historia de la Ciencia y sus reconstrucciones racionales*. Madri: Tecnos, 1993.
LEIBNIZ, G.W. *Mathematische schriften*. Hildesheim: Georg Olms, 1971.v.5
LOPÁRIC, Z. *Descartes heurístico*. Campinas: Unicamp, 1997.
NEWTON, I. *Opticks*. New York: Dover, 1974
POINCARÉ, H. *La ciencia y la hipótesis*. Buenos Aires: Austral, 1946.
PÓLYA, G .*Mathematics and plausible reasoning*. Princeton: Princeton University Press, 1954
_____. *How to solve it: a new aspect of the mathematical method.* Princeton: Princeton University Press, 1957.
_____. *Mathematical Discovery: on understanding, learning and teaching problem solving*. Nova York: Wiley, 1962.
POPPER,K.R *Conhecimento objetivo: uma abordagem evolucionária*. São Paulo: EDUSP, 1975.
_____. *Conjecturas e refutações*. Brasília: Universidade de Brasília, 1982.
PUTNAM, H. Mathematics without Foundations. In: BENACERRAF, P. & PUTNAM, H. (orgs.). *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. Cambridge: Cambridge University Press, 1983. P.295-311.

QUINE, W.V. Carnap and logical truth In: BENACERRAF, P. & PUTNAM, H. (org). *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. Cambridge: Cambridge University Press, 1983. pp.355-376
QUINE,W.V. Two dogmas of Empiricism. In: HART, W.D. (org). *The Philosophy of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press, 1996. p.31-51
ROBINSON, R**.** A análise na Geometria Grega. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, Campinas, n. 4, p. 5-15, 1983.
RUSSELL, B**.** Mathematical Logic as Based on The Theory of Types. *American Journal of Mathematics*. New York, v. 30, p. 222-262, 1908.
_____. *Introdução à Filosofia da Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1963.
_____. Logical Atomism. In: MARSH, R. C.(org). *Logic and Knowledge*. London: George Allen and Unwin, 1956. p.324-43.
SEIDEL, P. L. Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche Discontinuirliche Funktionen Darstellen. *Abhandlungen der Mathematischen-Physikalischen Klase der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften*, München, v 5, p.381-393, 1847.
TARSKI, A. The concept of truth in formalized languages. In: TARSKI, A. *Logic*, *Semantics and Metamathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1983a. p. 152-268.
_____. On the concept of logical consequence. In_____. *Logic*, *Semantics and Metamathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1983b. p.409-420